

Қосындыны, көбейтіндіні және бөліндіні дифференциалдау

1-теорема. Егер $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ және $g: E \rightarrow \mathbb{R}$ функциялары $x \in E$ нүктесінде дифференциалданса, онда бұл нүктеде

$$(f \pm g)(x), (f \cdot g)(x), \left(\frac{f}{g}\right)(x) \quad (g(x) \neq 0 \quad \forall x \in E)$$

функциялары да дифференциалданады және

$$\begin{aligned} (f(x) \pm g(x))' &= f'(x) \pm g'(x), \quad (f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \\ \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}. \end{aligned}$$

Дәлелдеуі. Тек соңғы формуланы дәлелдейік. Егер $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ болса, онда $g(x)$ функциясының x нүктесінде дифференциалдануынан оның үзіліссіздігі шығады, ал $g(x) \neq 0$ теңсіздігінен үзіліссіз функцияның таңба тұрақтылығы қасиетінен $g(x + \Delta x) \neq 0$. Осыларды ескеріп:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{f(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{f(x + \Delta x)g(x) - f(x)g(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)g(x)\Delta x} = \\ &= \frac{(f(x + \Delta x) - f(x))g(x) - f(x)(g(x + \Delta x) - g(x))}{g(x)g(x + \Delta x)\Delta x} = \frac{g(x)\frac{\Delta f}{\Delta x} - f(x)\frac{\Delta g}{\Delta x}}{g(x)g(x + \Delta x)} \end{aligned}$$

теңдігін аламыз. $\Delta x \rightarrow 0$ ұмтылдырып шекке көшсек, онда

$$y' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Күрделі функцияны дифференциалдау

1-теорема. E аралығында анықталған $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ және F аралығында анықталған $g: F \rightarrow \mathbb{R}$ функциялары беріліп, $f(E) \subset F$ болсын. Егер $f(x)$ функциясы $x_0 \in E$ нүктесінде, ал $g(y)$ функциясы $y_0 = f(x_0)$ нүктесінде дифференциалданса, онда $h = g(f(x))$ күрделі функциясы x_0 нүктесінде дифференциалданады және

$$h'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0). \quad (1)$$

Кері функцияны дифференциалдау

1-теорема. Егер E аралығында қатаң монотонды және үзіліссіз $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ функциясы $x_0 \in E$ нүктесінде дифференциалданса және $f'(x_0) \neq 0$ болса, онда оның $x = g(y)$ кері функциясы $y_0 = f(x_0)$ нүктесінде дифференциалданады және

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \quad (1)$$

Параметр арқылы берілген функцияны дифференциалдау

t сандық өсінің E кесіндісінде

$$x = \varphi(t), y = \psi(t) \quad (1)$$

функциялары берілген және бұл кесіндіде $\varphi(t)$ функциясы қатаң бірсарынды болсын. Онда $\varphi(E)$ жиынында анықталған $t = u(x)$ кері функциясы бар. Енді $\varphi(E)$ жиынында анықталған $f(x) = \psi(u(x))$ күрделі функциясын қарастырайық. Міне осы $f(x) = \psi(u(x))$ функциясын (1) теңдіктермен параметр арқылы берілген функция деп, ал мұндағы t айнымалысын параметр деп атайды.

1-теорема. E аралығында қатаң монотонды және үзіліссіз $x = \varphi(t)$ функциясы $t_0 \in E$ нүктесінде дифференциалдансын және $\varphi'(t_0) \neq 0$ болсын, ал E аралығында анықталған $y = \psi(t)$ функциясы t_0 нүктесінде дифференциалдансын. Онда параметр арқылы берілген $f(x) = \psi(u(x))$ күрделі функциясы $x_0 = \varphi(t_0)$ нүктесінде дифференциалданады және

$$f'(x_0) = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}.$$

Локальды экстремум

$E \subset \mathbb{R}$ аймағында анықталған $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ функциясы берілсін.

Анықтама. Егер $x_0 \in E$ нүктесінің $U_E(x_0)$ маңайы табылып, оның барлық $x \in U_E(x_0)$ нүктелерінде $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$) болса, онда x_0 нүктесі $f(x)$ функциясының локальды максимум (локальды минимум) нүктесі деп, ал $f(x)$ функциясының сол нүктедегі $f(x_0)$ мәні функцияның локальды максимумы (локальды минимумы) деп аталады.

Локальды максимум және локальды минимум нүктелері локальды экстремум нүктелері, ал ондағы функцияның мәні локальды экстремумы деп аталады.

Енді нүктенің экстремумдік болуының қажетті шарты болатын Ферма теоремасын келтірейік.

1-теорема (Ферма теоремасы). Егер функция өзінің локальды экстремум нүктесінің әлдебір аймағында анықталған, ал сол нүктеде тежеулі туындысы бар функция болса онда оның ол туынды нөлге тең.

Дифференциалданатын функциялар жөніндегі негізгі теоремалар

Ролль теоремасы. Егер $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ функциясы :

- 1) $[a, b]$ кесіндісінде үзіліссіз ;
 - 2) (a, b) интервалында дифференциалданса;
 - 3) кесіндінің ұштарында тең мәндер қабылдайтын болса: $f(a) = f(b)$
- онда (a, b) аралығынан $f'(\xi) = 0$ болатын ξ нүктесі табылады.

Лагранж теоремасы. Егер $f : [a, b] \rightarrow R$ функциясы :

- 1) $[a, b]$ кесіндісінде үзіліссіз ;
 - 2) (a, b) интервалында дифференциалданса;
- онда (a, b) аралығынан ξ нүктесі табылып

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a) \quad (1)$$

теңдігі орындалады.

1-теорема (функция бірсарындылығы шарты). Егер интервалда дифференциалданатын функция туындысы теріс емес (оң) болса, онда функция бұл интервалда кемімейді (өседі). Ал функция туындысы оң емес (теріс) болса, онда функция бұл интервалда өспейді (кемиді).

2-теорема (тұрақты функция туралы). $[a, b]$ кесіндісінде үзіліссіз функция осы кесіндіде тұрақты болуы үшін оның туындысының (a, b) интервалында нөлге тең болуы қажетті әрә жеткілікті.

Коши теоремасы

Теорема. Егер f және g функциялары:

- 1) $[a, b]$ кесіндісінде үзіліссіз ;
- 2) (a, b) интервалында дифференциалданса;
- 3) (a, b) интервалында $g'(x) \neq 0$ болса

онда

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad (1)$$

орындалатындай (a, b) аралығынан ξ нүктесі табылады.